

applied calculus for data science

פרק 28 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים.....1
2. מבחני התכנסות לטורים.....3
3. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי.....5
4. תרגילי תיאוריה.....6

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} & (3) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} & (5) & \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} & (4) \end{array}$$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} & (8) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} & (7) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} & (10) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) & (9) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} & (11) \end{array}$$

טור הרמוני מוכלל

(12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} & \text{ג.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ב.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} & \text{א.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} & \text{ו.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} & \text{ה.} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} & \text{ד.} \end{array}$$

תכונות אלגבריות של טורים

(13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

(14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

תשובות סופיות

- | | | |
|--------------------------------------|------------------------------|------------------------|
| (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$ | (2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$ | (3) מתבדר. |
| (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$ | (5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$ | (6) מתכנס ל-8. |
| (7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$ | (8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$ | (9) מתבדר. |
| (10) $S = \frac{1}{\ln 2}$ | (11) $\frac{1}{12}$ | |
| (12) א. מתכנס.
ד. מתבדר. | ב. מתבדר.
ה. מתכנס. | ג. מתבדר.
ו. מתכנס. |
| (13) א. מתכנס. | ב. מתבדר. | ג. מתבדר. |
| (14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$ | | |

מבחני התכנסות לטורים

שאלות

מבחן ההתבדרות

(1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\text{א. } \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{ב. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ג. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad \text{ד. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n$$

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 2-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1} \\ (3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \\ (4) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \\ (5) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p \leq 1) \end{aligned}$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{aligned} (7) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 10n + 1} \\ (8) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \\ (9) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4 + n + 1}} \\ (10) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \\ (11) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) \\ (12) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

מבחן המנה ומבחן השורש

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (1+n^2)}{n!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (19)$$

תשובות סופיות

- | | | | |
|-----------------|---------------|-------------|-------------|
| (1) א-ו: מתבדר. | (2) מתבדר. | (3) מתבדר. | (4) מתכנס. |
| (5) מתבדר. | (6) א. מתכנס. | (7) מתכנס. | (8) מתבדר. |
| (9) מתכנס. | (10) מתכנס. | (11) מתבדר. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר. | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |
| (17) מתכנס. | (18) מתכנס. | (19) מתכנס. | (20) מתכנס. |
| (21) מתכנס. | | | |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

בשאלות 4-10 קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (6) & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (5) & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (9) & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (8) & \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n} \right)^n \quad (7) \\ & & \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (10) \end{aligned}$$

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------------|------------------|------------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתכנס. | (3) מתכנס. |
| (4) מתבדר. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בתנאי. |
| (7) מתכנס בהחלט. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |
| (10) מתכנס בתנאי. | | |

תרגילי תיאוריה

שאלות

- (1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.
ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

- (2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.
ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

- (3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

- (4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

- (5) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכיחו כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.
ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

- (6) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

- (7) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(8) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.(9) נניח כי $a_n \geq 0$.הוכיחו כי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(10) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.(11) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(12) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.(13) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.(14) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

- 15** נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.
- א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.
1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.
 2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.
- ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
- הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il